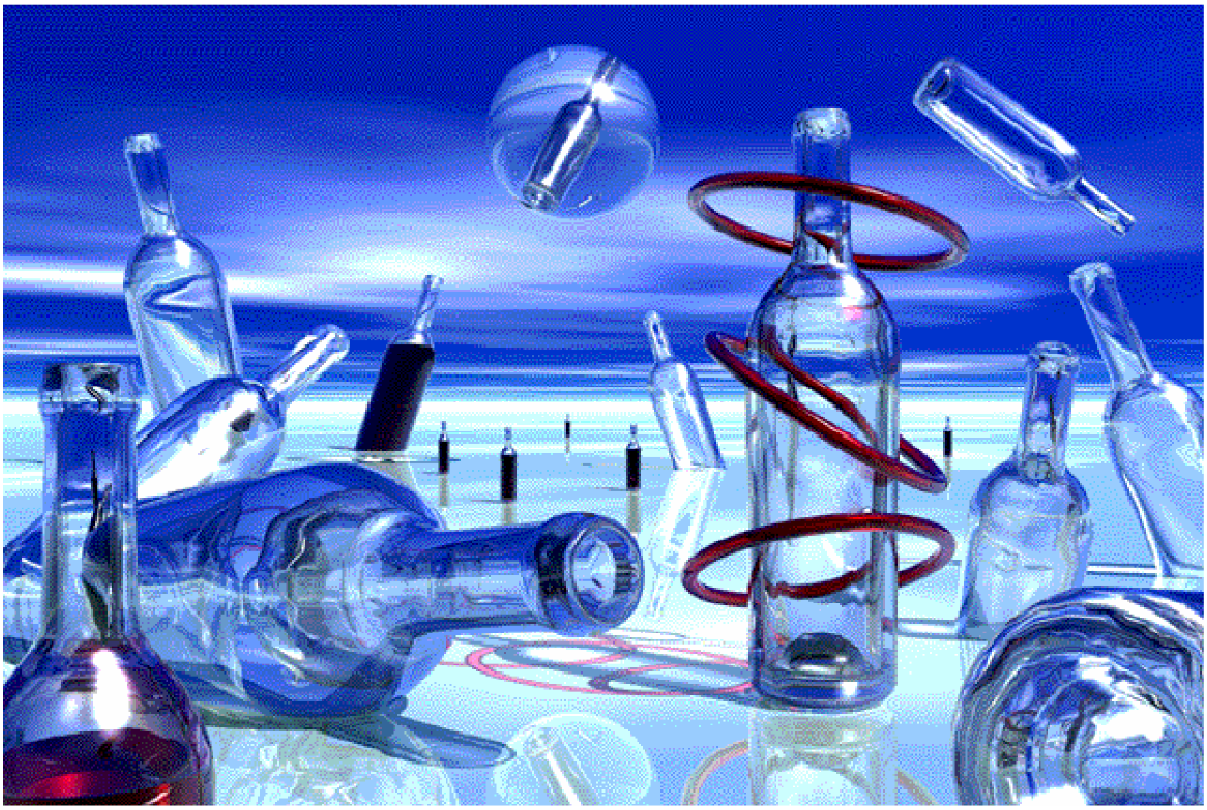
# Obtención del volumen de una botella.

Métodos numéricos
Curso 05/06



Fátima Cerezo Ruiz
Ciara García Pérez
María Martín Calero
Joaquín Romero García

# Indice:

## 1. Enunciado:

Realizar un programa en MATLAB que interpole a trozos una serie de medidas tomadas de una botella de vidrio mediante splines cúbicas. Integrar numéricamente dicha función para obtener el volumen del interior del recipiente y el del material de vidrio. Se deben considerar los siguientes aspectos y requisitos:

a) Definir varias tablas a partir de las medidas tomadas de diferentes modelos de botellas.

b) Interpolar con splines cúbicas y representar dicha función interpoladora.

c) Calcular mediante integración numérica del volumen del continente y contenido.

# 2. Introducción sobre interpolación:

Ingenieros y científicos suponen habitualmente que las relaciones entre las variables de un problema físico pueden ser reproducidos de manera aproximada a partir los datos extraídos del problema Su objetivo último podría ser determinar los valores en puntos intermedio, aproximar la integral o la derivada de la función en cuestión o simplemente, obtener una representación continua o suave de las variables del problema.

La interpolación es el proceso de determinar una función que represente exactamente una colección de datos. El tipo más elemental de interpolación consiste en ajustar un polinomio a una colección de puntos dados. Los polinomios tienen derivadas e integrales que son polinomios, así que son una elección natural para aproximar derivadas e integrales.

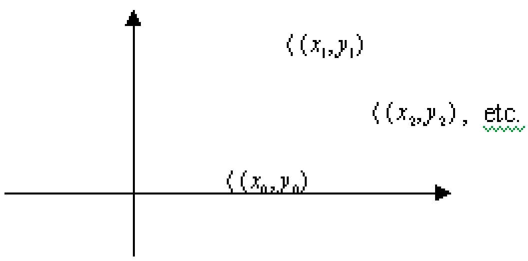
## 2.1. Interpolación general:

Estudiaremos el importantísimo tema de la interpolación de datos. Comencemos dando la definición general.

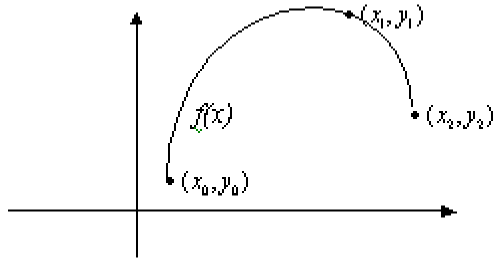
**Definición.** Dados $n+1$ puntos que corresponden a los datos:

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $\cdots$ | $y_n$ |

Los cuales se representan gráficamente como puntos en el plano cartesiano,




Si existe una función $f(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ (donde suponemos que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 0,1,2,\cdots,n$, entonces a $f(x)$ se le llama una función de interpolación de los datos, cuando es usada para aproximar valores dentro del intervalo $[x_0, x_n]$, y se le llama función de extrapolación de los datos, cuando está definida y es usada para aproximar valores fuera del intervalo.




Evidentemente pueden existir varios tipos de funciones que interpolen los mismos datos; por ejemplo, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones polinomiales, combinaciones de éstas, etc.

El tipo de interpolación que uno elige, depende generalmente de la naturaleza de los datos que se están manejando, así como de los valores intermedios que se están esperando.

Un tipo muy importante es la interpolación por funciones polinomiales. Puesto que evidentemente pueden existir una infinidad de funciones polinomiales de interpolación para una misma tabla de datos, se hace una petición extra para que el polinomio de interpolación, sea único.

**Definición.** Un polinomio de interpolación es una función polinomial que además de interpolar los datos, es el de menor grado posible.

Caso n=0

Tenemos los datos:

| $x$ | $x_0$ |
|---|---|
| $y$ | $y_0$ |

En este caso, tenemos que $f(x) = y_0$ (polinomio constante) es el polinomio de menor grado tal que $f(x_0) = y_0$, por lo tanto, es el polinomio de interpolación.

Caso n=1

Tenemos los datos:

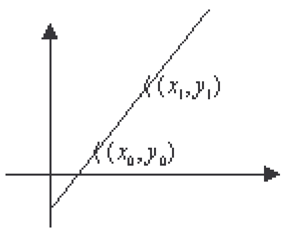
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ |

En este caso, el polinomio de interpolación es la función lineal que une a los dos puntos dados. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

es el polinomio de interpolación.

La siguiente gráfica representa este caso:




**Observación**.

Vemos que en el polinomio de interpolación del caso n=1 se encuentra como primer término, $y_0$, que es el polinomio de interpolación del caso n=0.

Continuemos:

Caso n=2

Tenemos los datos:

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ |

Para este caso, el polinomio de interpolación va a ser un polinomio de grado 2. Tomando en cuenta la observación anterior, intuimos que el polinomio de interpolación será como sigue:

$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad +$ Término cuadrático

Por lo tanto, planteamos el polinomio de interpolación como sigue:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Si asignamos $x = x_0$ , se anulan los valores de $b_1$ y $b_2$ , quedándonos el resultado:

$$f(x_0) = b_0$$

Como se debe cumplir que $f(x_0) = y_0$ , entonces:

$$y_0 = b_0$$

Si asignamos $x = x_1$ , el valor de $b_2$ queda anulado, resultando lo siguiente:

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

Como se debe cumplir que $f(x_1) = y_1$ y ya sabemos que $y_0 = b_0$, entonces $y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$, de lo cual obtenemos el valor para $b_1$ :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$$

Asignando $x = x_2$ , vamos a obtener:

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Como se debe cumplir que $f(x_2) = y_2$, y ya sabemos que $y_0 = b_0$ y $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$, sustituimos estos datos para después despejar el valor de $b_2$:

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

De lo cual podemos hacer un despeje parcial para lograr la siguiente igualdad:

$$\frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0)$$

Ahora en el numerador del miembro izquierdo de la igualdad, le sumamos un cero $(- y_1 + y_1)$, de tal manera que no se altere la igualdad:

$$\frac{y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0)$$

A continuación, aplicamos un poco de álgebra para así obtener los siguientes resultados:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}\right) = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1}\left[\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - 1\right] = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{\cancel{x_2 - x_1}}\left[\frac{\cancel{x_2 - x_1} - \cancel{x_0} + \cancel{x_0}}{x_1 - x_0}\right] = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_2(x_2 - x_0)$$

Y finalmente despejando a $b_2$ vamos a obtener:

$$b_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Por lo tanto, el polinomio de interpolación para este caso es:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

## 2.2. Spline cúbica:

Hemos visto el uso de polinomios para aproximar funciones arbitrarias. Sin embargo, se necesitan polinomio de un grado relativamente alto para conseguir aproximaciones precisas y éstos presentan algunos inconvenientes de consideración: por un lado, poseen una naturaleza oscilatoria y, por otro, una fluctuación de los datos sobre un trozo pequeño del intervalo puede inducir grandes fluctuaciones de los datos sobre un trozo pequeño del intervalo puede inducir grandes fluctuaciones sobre el intervalo completo.

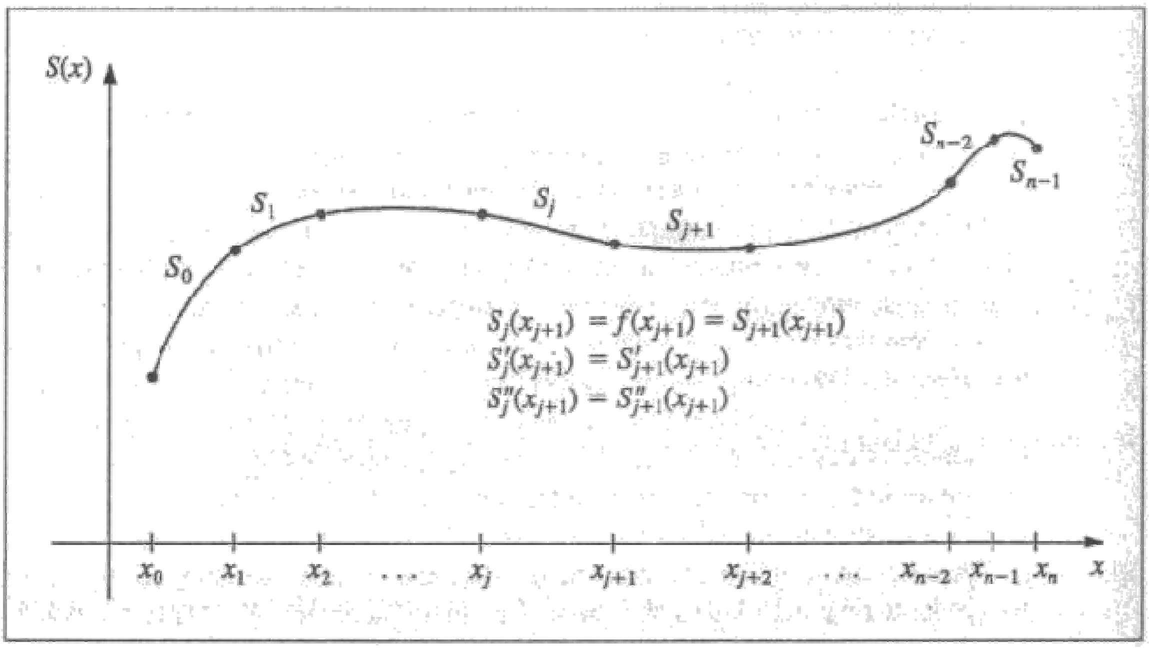
Una opción alternativa es dividir el intervalo en un grupo de subintervalo y construir un polinomio de aproximación diferente sobre cada subintervalo, lo que se conoce como aproximación polinomial a trozos.

La aproximación polinomial a trozos más simple consiste en unir los puntos dados ($x_0$, $f(x_0)$), ($x_1$,$f(x_1)$), …, ($x_n$, $f(x_n)$) mediante una serie de líneas rectas para formar una línea quebrada.

Un inconveniente de la aproximación lineal a trozos es que, en general, no es deribable en los extremos de los subintervalo, así que la función que interpola no es "suave" en dichos puntos; sin embargo, a menudo ocurre que las condiciones físicas del problema requieren suavidad, por lo que la función aproximadamente debe ser deribable con continuidad.

La aproximación polinomial a trozos más habitual utiliza polinomios cúbicos entre cada dos nodos y se llama interpolación mediante splines cúbicas. Un polinomio cúbico cualquiera involucra cuatro constantes, así que en el procedimiento de aproximación mediante splines cúbicas hay la suficiente flexibilidad como para asegurar que la función interpolante tiene dos derivadas continuas en el intervalo; sin embargo, las derivadas de la spline cúbica no tiene porqué coincidir con las derivadas de la función, ni siquiera en los nodos.

El spline cúbico ($k$=3) es el spline más empleado, debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo.



Sobre cada intervalo $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, $S$ está definido por un polinomio cúbico diferente. Sea $S_i$ el polinomio cúbico que representa a $S$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, por tanto:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los polinomios $S_{i-1}$ y $S_i$ interpolan el mismo valor en el punto $t_i$, es decir, se cumple:

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i)$$

$$(1 \leq i \leq n-1)$$

Por lo que se garantiza que $S$ es continuo en todo el intervalo. Además, se supone que $S'$ y $S''$ son continuas, condición que se emplea en la deducción de una expresión para la función del spline cúbico.

Aplicando las condiciones de continuidad del spline $S$ y de las derivadas primera $S'$ y segunda $S''$, es posible encontrar la expresión analítica del spline.

$$\begin{aligned} S_i(x) \;&=\; \tfrac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \tfrac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 \\ &+ \left(\tfrac{y_{i+1}}{h_i} + \tfrac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\tfrac{y_i}{h_i} - \tfrac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x) \end{aligned}$$

En la expresión anterior, $h_i = t_{i+1} - t_i$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son incógnitas. Para determinar sus valores, utilizamos las condiciones de continuidad que deben cumplir estas funciones.

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

La ecuación anterior, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$ genera un sistema de $n$-1ecuaciones lineales con $n$+1 incógnitas $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Podemos elegir $z_0$ y $z_1$ de forma arbitraria y resolver el sistema de ecuaciones resultante para obtener los valores de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Una elección especialmente adecuada es hacer $z_0=z_1=0$. La función spline resultante se denomina *spline cúbico natural* y el sistema de ecuaciones lineal expresado en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_{n-2} \\ \nu_{n-1} \end{pmatrix}$$

En donde:

$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

$$u_i = 2(h_i \mid h_{i-1}) \quad \begin{matrix} h_{i-1}^2 \\ u_{i-1} \end{matrix}$$

$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$\nu_i = b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}\nu_{i-1}}{u_{i-1}}$$

El valor del spline $S$ en un punto $x$ cualquiera interpolado se puede calcular de forma eficiente empleando la siguiente expresión:

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)\left[C_i + (x - t_i)\left[B_i + (x - t_i)A_i\right]\right]$$

En donde,

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

Dados una función f definida en [a,b] y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$, una spline cúbica interpolante f es una función S que verifica las siguientes condiciones:

**a.-** Para cada j = 0, 1, … n-1, S(x) es un polinomio cúbico, que denotamos por Sj(x), en el subintervalo $[x_j, x_{j-1}]$.

**b.-** $S(x_j) = f(x_j)$ para cada j = 0, 1, … n.

**c.-** $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada j = 0, 1, … n-2.

**d.-** $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada j = 0, 1, … n-2.

**e.-** $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada j = 0, 1, … n-2

**f.-** S cumple alguna de las siguientes condiciones en los extremos del intervalo:

**1.-** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (spline natural, de extremos libres o, simplemente, libre);

**2.-** $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (spline con extremos sujetos o, simplemente, sujeta).

# 3. Introducción teórica a la integración numérica de gauss-legendre:

## 3.1. Cuadratura de gauss:

$$\boxed{\int_a^b w(x)\,f(x)\,dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)}$$

**Objetivos**

- Elección de nodos $X_1$ , $X_2$ ,…, $Xn$, para aumentar el grado de precisión.
- Máximo grado de exactitud.

**Conclusiones**

- Una fórmula de cuadratura con n nodos es exacta para polinomios de grado $\leq 2n\text{-}1$, si y sólo si:
  - La fórmula es interpolatoria.
  - Los nodos son las raíces del n-ésimo polinomio ortogonal respecto del producto escalar inducido por *w(x)* en [*a,b*].
- No existe ninguna fórmula con *n* nodos exacta para todos los polinomios de grado *2n*.

**Fórmulas de cuadratura:**

$$\boxed{\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)}$$

$$c_i = \frac{1}{T_n'(x_i)} \int_a^b \frac{T_n(x)}{x - x_i} w(x)\, dx \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$E(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b T_n^2(x) w(x)\, dx \qquad a<\xi<b$$

### 3.2. Gauss-legendre:

- La integración numérica, consiste en sustituir la función que se pretende integrar, por un polinomio de interpolación (otra función de forma), que pase por un determinado número de puntos llamados **puntos de Gauss**. La integración del polinomio, se realiza posteriormente a través de una suma ponderada de los valores de la función, en estos puntos de Gauss.

- El método más empleado para sustituir la función por un polinomio, es la Cuadratura de Gauss-Legendre. El método permite integrar cualquier función entre **-1 y +1**, sustituyendo la función a integrar f(x), por un polinomio de Legendre de grado **2n-1**. Tomando como base, los **n** puntos de Gauss, se puede obtener un valor tan aproximado a la integral, como se desee.

- Las abscisas de los puntos de Gauss, corresponden a las raíces del polinomio de Legendre escogido.

- Como conclusión final, se dirá que los **puntos de Gauss**, son los puntos óptimos para la evaluación de cualesquiera incógnitas a despejar. En los otros puntos del elemento, la aproximación es pobre, y los errores pueden llegar a ser muy considerables.

- En *[-1,1]*, los polinomios de Legendre forman una familia ortogonal:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0(x)=1 \qquad p_1(x)=x \qquad n=1,2,\ldots \\ p_{n+1}(x)=\dfrac{1}{n+1}\left[(2n+1)x\, p_n(x)-n\, p_{n-1}(x)\right] \end{array}}$$

- *pn(x)* tiene *n* raíces reales distintas,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_k=\left[1-\dfrac{1}{8n^2}+\dfrac{1}{8n^3}\right]\cos\dfrac{4k-1}{4n+2}+O\left(n^{-4}\right) \\ \quad \mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{n} \end{array}}$$

- Y los coeficientes de la fórmula de cuadratura,

$$\boxed{\begin{array}{l} c_i=\displaystyle\int_{-1}^{1}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx=\frac{2}{\left(1-x_i^2\right)\left(p_n^{'}(x_i)\right)^2} \\ \quad i=1,2,\ldots,n \end{array}}$$

### 3.3. Polinomios de legendre:

La pregunta que se hizo C. F. Gauss era qué se podría ganar si se eligieran adecuadamente dentro del intervalo de integración los puntos de evaluación de la función. La respuesta es clara: se puede ganar en precisión.

Sin perder generalidad cambiamos el intervalo de integración de [a,b] a [-1,1]. Esto obliga a definir una nueva variable:

$$\boxed{z = \frac{2x-(b+a)}{b-a}} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}(b-a)z + \frac{1}{2}(b+a)}$$

y la integral se transforma en:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx} \Rightarrow \boxed{I = \int_{-1}^{+1} g(z)dz}$$

Siendo la nueva función:

$$\boxed{g(z) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right)}$$

La integral que se ha reescrito se va a evaluar como la suma *óptima* de unos pesos ($w_i$) por las imágenes de la función g(z) en unos puntos específicos ($z_i$). La nueva expresión constituye una generalización de las fórmulas de los trapecios de Simpson:

$$\boxed{I = \int_{-1}^{+1} g(z)kz = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot g(z_i)} \qquad (1)$$

Esta ecuación así planteada requiere la evaluación de 2n+2 variables (los n+1 pesos y los correspondientes n+1 valores de abscisas).

Vamos a situar el problema para obtener el resultado exacto cuando f(x) y g(z) son polinomios de grado 3 o inferior, integrando la ecuación de una recta. Esto se puede conseguir eligiendo n=1, puesto que luego se dispone de 4 parámetros ($w_0$, $w_1$, $z_0$ y $z_1$) que se van a manipular para ajustar el término de la derecha de (1) de forma exacta:

$$\boxed{I = \int_{-1}^{+1} g(z)dz = w_0 g(z_0) + w_1 g(z_1)}$$

Si forzamos que la igualdad se cumpla para una base de los polinomios de grado 3 o inferior, también se va a cumplir para cualquier polinomio de grado 3 o inferior. Cuando la función g(z) es α, αz, αz², αz³ (α es una constante arbitraria) se obtienen las igualdades siguientes:

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} a \cdot dz = 2a = w_0 a + w_1 a} \Rightarrow \boxed{w_0 + w_1 = 2}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} az \cdot dz = 0 = w_0 a z_0 + w_1 a z_1} \Rightarrow \boxed{w_0 z_0 + w_1 z_1 = 0}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} az^2 dz = \frac{2}{3} a = w_0 a z_0^2 + w_1 a z_1^2} \Rightarrow \boxed{w_0 z_0^2 + w_1 z_1^2 = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} az^3 dz = 0 = w_0 a z_0^3 + w_1 a z_1^3} \Rightarrow \boxed{w_0 z_0^3 + w_1 z_1^3 = 0}$$

La solución de este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas es:

$$\boxed{w_0 = w_1 = 1}; \quad \boxed{z_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}}; \quad \boxed{z_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}}$$

Así la integral queda reducida a evaluar la expresión:

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} g(z)dz = g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}$$

Recordemos que esta expresión es exacta si la función g(z) es un polinomio de grado 3 o inferior. En otras circunstancias, tanto mejor será esta aproximación cuando más se asemeje la función g(z) a un polinomio de esas características.

En realidad, si la función es un polinomio de grado 2n-1 se puede deducir qué 2n parámetros (n puntos y los correspondientes pesos) se deben emplear para que la cuadratura sea exacta.

Se demuestra que los puntos $\{z_i\}$ coinciden con las raíces del polinomio de Legendre de grado n, $P_n(x)$. Estas raíces se distribuyen de forma simétrica respecto al origen. Los pesos son:

$$\boxed{w_i = \frac{2}{(1-z_i^2)\left[P_n'(z_i)\right]^2}}$$

En (1), para obtener la igualdad exacta se debe añadir a la derecha el residual:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left[(2n)!\right]^3}\, f^{2n)}(\varepsilon)} \quad \text{donde } -1 < \varepsilon < +1$$

La tabla siguiente muestra los pares de pesos y puntos que se pueden considerar:

| n | $z_i$ | $w_i$ |
|---|---|---|
| 2 | ±0’57735 | 1’000000 |
| 3 | 0 | 0’888889 |
| | ±0’774597 | 0’555556 |
| 4 | ±0’339981 | 0’652145 |
| | ±0’861136 | 0’347855 |
| 5 | 0 | 0’568889 |
| | ±0’538469 | 0’478629 |
| | ±0’90618 | 0’236927 |

## 3.4. Ejemplo de gauss-legendre:

$$\boxed{I(f) = \int^{1.5} e^{-x^2}\,dx}$$

- Cambio de variable a *[-1,1]*

$$\boxed{\int^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{\frac{-(t+5)^2}{16}}\,dx}$$

- Gauss-Legendre *n=2*

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{4}\left[ e^{\frac{-(0.5773+5)^2}{16}} + e^{\frac{-(-0.5773+5)^2}{16}} \right] = 0.1094003}$$

- Gauss-Legendre *n=3*

$$I(f) \approx \frac{1}{4}\left[ 0.5555556\, e^{\frac{-(0.774596+5)^2}{16}} + \right.$$

$$\left. + 0.888889\, e^{\frac{-(0+5)^2}{16}} + 0.555556\, e^{\frac{-(-0.774596+5)^2}{16}} \right]$$

$$= 0.1093642$$

## 4. Introducción sobre las botellas de vidrio:

Los antiguos egipcios fueron los primeros en fabricar vidrio, calentando arena a la que le agregaban cenizas formando un material transparente, resistente y pesado.

Piezas de vidrio egipcio decorado, siglo IV. a.C.

Actualmente el vidrio se fabrica con las mismas materias primas que utilizaban los egipcios hace miles de años. La mayor parte del vidrio se elabora partiendo de la arena, del carbonato sódico y la piedra caliza. Estos compuestos son colocados en un horno y se los somete a temperaturas muy elevados de entre 1.300 y 1.500º centígrados. Si bien los materiales necesarios para su fabricación son abundantes y baratos, el consumo de energía en el proceso de fabricación del vidrio es muy alto, tanto para la extracción de arena como para fundir las materias primas con los que éste se fabrica.

El vidrio posee algunas características que lo hacen muy útil para la fabricación de distintos objetos como por ejemplo botellas, frascos, damajuanas, termos y vasos.

### 4.1. Usos del vidrio:

Las botellas de PVC o PET no tienen la misma apariencia de frescura del vidrio, por lo que se han buscado diferentes presentaciones como la apariencia de marmoleado, el ponerle asa, o adaptador especial de verte, lo cual da sensación de comodidad o utilidad. También hace parecer al envase más lleno como en el caso de las mermeladas.

Es útil para los cosméticos y licores caros ya que las caras planas hacen resaltar la imagen de alta calidad recordando al consumidor las joyas o el cristal. Bebidas como cerveza y vinos, quesos de untar y patés, mermeladas, alimentos en general y en algunos artículos farmacéuticos son contenidos comunes de vidrio, aunque los últimos tienden a ser envasados en los plásticos y cartones. Aún así el vidrio es difícil de eliminar, sobre todo, del mercado de los cosméticos y perfumes.

## 4.2. Clasificación de los envases de vidrio:

- Envases de primera elaboración: Botellas o Garrafas, Envases de boca angosta, y capacidad de entre 100 y 1500 ml. Botellones: De 1.5 a 20 litros o más. Frascos: De pocos ml a 100 ml. Pueden ser de boca angosta o boca ancha. Tarros: Capacidad hasta un litro o más; tienen el diámetro de la boca igual al del cuerpo. Si la altura es menor que el diámetro se llaman potes. Vasos: Recipientes de forma cónica truncada e invertida.
- Envases de Segunda Elaboración: Ampolletas: De 1 a 50 ml para humanos, y hasta 200 ml para uso veterinario. La punta se sella por calor. Frascos y Frascos-Ampollas: Viales generalmente para productos sólidos, de 1 a 100 ml.

## 4.3. Diseño para el envase de vidrio:

Para el diseño de un envase de vidrio, se deben considerar factores tales como:

1) Forma, estética, estabilidad y funcionalidad en sus líneas.

2) El tipo de corona o rosca que se usará, de acuerdo al uso que se le dará.

3) La relación del envase con el contenido.

El vidrio tiene resistencia a la comprensión y estabilidad en la línea de llenado por lo que se le puede dar cualquier forma en el diseño, teniendo cuidado en la calidad de los moldes y en el proceso de fabricación. Es preciso tener en cuenta el tamaño y la forma de las etiquetas. La mejor superficie para las etiquetas es la cilíndrica, donde se puede alisar la etiqueta en el envase, ya que en una superficie esférica o cóncava, ésta se arrugaría.

El diseñador debe investigar las condiciones en que se usará el envase, con el fin de darle el diseño óptimo y funcional. En los envases de vidrio es posible obtener una gran variedad de efectos, por ejemplo, dar la impresión de que el envase está lleno apretadamente con el producto. Las facetas en el envase, usadas especialmente en perfumes o cosméticos, hacen resaltar la imagen de alta calidad, recordando las joyas o el cristal. En el diseño de un envase debe tomarse muy en cuenta la ergonomía. En este punto cabe mencionar que parte ciertos casos el diseño de una asa adicional hará más manejable un envase.

Otro factor importante a considerar son las dimensiones y condiciones del lugar de almacenaje.

El diseñador debe estar al corriente de la maquinaria que se usará para fabricar y llenar los envases de vidrio. Puede que los cuellos de las botellas tengan que ser sujetados por la máquina durante el proceso de fabricación, por lo que se debe ser cuidadoso en el diseño para evitar que se rompan. Para realizar la resistencia de las botellas, se acostumbra adornarlas con estrías o texturas, lo que evita roturas por impacto. La resistencia de la botella puede ser aumentada por el uso efectivo de la forma; por ejemplo, las formas esféricas son más resistentes, seguidas de las cilíndricas y las rectangulares. Si se requiere de una botella rectangular, por la razón que sea, se puede incrementar la resistencia añadiéndole aristas o protuberancias en el centro de la botella. En realidad, la resistencia de la botella se incrementará casi un 50% con una buena aplicación de la forma.

## 5. Definición de las botellas:

En este apartado vamos a definir las características de las botellas que vamos a usar como modelo en la realización de nuestro trabajo, cada una de ellas tiene unas medidas específicas y unos espesores distintos, la única característica que poseen en común es que todas ellas son de vidrio.

Para este trabajo hemos escogido tres botellas como modelos, las cuales vamos a pasar a comentar a continuación:

### 5.1. Primera botella:

La botella que vamos a usar como dijimos es una botella de vidrio cuyas características dimensionales son las que se muestran a continuación:

- Altura de la botella 18 cm
- Espesor: 2.7mm

Imagen primera botella

La toma de medidas las empezamos a realizar desde la boca de la botella hacia la base. Las medidas que tomamos son los diámetros que va tomando la botella, siendo cada una cada 0.5 cm. Hemos considerado que el espesor de la botella se mantiene constante, en el valor que hemos comentado anteriormente.

En la tabla siguiente se muestran recogidos los valores de las medidas de los diámetros:

**Tabla 1:** Medidas de los diámetros primera botella

| | |
|---|---|
| **0** | 53.5 |
| **1** | 68 |
| **2** | 72 |
| **3** | 75 |
| **4** | 75.3 |
| **5** | 74.9 |
| **6** | 74.3 * |
| **7** | 74.3 |
| **8** | 74.3 |
| **9** | 74.3 |
| **10** | 74.3 |
| **11** | 74.3 |
| **12** | 74.3 |
| **13** | 74.3 |
| **14** | 74.3 |
| **15** | 74.3 |
| **16** | 74.3 |
| **17** | 74.3 |
| **18** | 74.3 |
| **19** | 74.3 |
| **20** | 74.3 |
| **21** | 74.3 |
| **22** | 74.8 |
| **23** | 74.2 |
| **24** | 73.2 |
| **25** | 69.7 |
| **26** | 65.3 |
| **27** | 60.5 |
| **28** | 56 |
| **29** | 51 |
| **30** | 45.6 |
| **31** | 40.4 |
| **32** | 36 |
| **33** | 34.7 |
| **34** | 35.5 |
| **35** | 35 |
| **36** | 35 |

### 5.2. Segunda botella:

La segunda botella posee las siguientes características dimensionales:

- Altura de la botella: 21.5cm.
- Espesor: 4 mm.

Imagen segunda botella

Igual que en caso anterior la toma de medidas la empezamos a hacer desde la boca de la botella hacia la base, haciendo del mismo modo divisiones cada 0.5 cm. Las medidas de los diámetros las mostramos en la siguiente tabla:

**Tabla 2:** Medida de los diámetros de la segunda botella.

| | |
|---|---|
| **0** | 51 |
| **1** | 55.4 |
| **2** | 55.8 |
| **3** | 56.3 |
| **4** | 55.7 |
| **5** | 55.6 |
| **6** | 55.6 |
| **7** | 55.6 |
| **8** | 55.6 |
| **9** | 55.6 |
| **10** | 55.6 |
| **11** | 55.6 |
| **12** | 55.6 |
| **13** | 55.6 |

| | |
|---|---|
| **14** | 55.6 |
| **15** | 55.6 |
| **16** | 55.6 |
| **17** | 55.6 |
| **18** | 55.6 |
| **19** | 55.6 |
| **20** | 55.6 |
| **21** | 55.6 |
| **22** | 55.6 |
| **23** | 55.6 |
| **24** | 57.1 |
| **25** | 56.5 |
| **26** | 52.4 |
| **27** | 46.3 |
| **28** | 33.7 |
| **29** | 32 |
| **30** | 31 |
| **31** | 30.4 |
| **32** | 30 |
| **33** | 29.5 |
| **34** | 28.7 |
| **35** | 28.2 |
| **36** | 27.4 |
| **37** | 27 |
| **38** | 26.4 |
| **39** | 26 |
| **40** | 25.2 |
| **41** | 27.3 |
| **42** | 24.5 |
| **43** | 26 |

### 5.3. Tercera botella:

La última botella también es de vidrio y las características que tiene son las siguientes:

- Altura de la botella: 25.5 cm
- Espesor de la botella: 3.5 mm

Imagen tercera botella

Las medidas como en los casos anteriores, se empiezan a realizar desde la boca de la botella hasta la base de la misma, cada una de ellas a distancias de 1 cm, obteniendo las siguientes medidas de los diámetros:

**Tabla 3:** Medidas de los diámetros de la tercera botella

| | |
|---|---|
| **0** | 74.4 |
| **1** | 87.6 |
| **2** | 88.8 |
| **3** | 87.6 |
| **4** | 87.6 |
| **5** | 87.6 |
| **6** | 87.6 |
| **7** | 87.6 |
| **8** | 87.6 |
| **9** | 87.6 |
| **10** | 87.6 |
| **11** | 87.6 |

| | |
|---|---|
| **12** | 87.3 |
| **13** | 87.8 |
| **14** | 87.4 |
| **15** | 85.7 |
| **16** | 81.4 |
| **17** | 76.5 |
| **18** | 65.7 |
| **19** | 57.2 |
| **20** | 52 |
| **21** | 47.7 |
| **22** | 44.4 |
| **23** | 42.7 |
| **24** | 45.4 |
| **25** | 43.1 |

Las divisiones en partes iguales de las botellas las hemos realizado con una gran precisión utilizando los dispositivos tecnológicos de los que disponemos incluyendo en este punto el pie de rey para la toma de medidas.

## 6. Programa:

Como ya sabemos el objetivo de nuestro trabajo es la generación del perfil de una botella y con el determinar el volumen tanto del interior de la botella como el volumen de la propia botella.

Nuestro programa va a constar de dos partes las cuales comentaremos por separado mas adelante. La primera parte consistirá principalmente en la generación del perfil de la botella y la segunda parte consiste en obtener el volumen que genera es curva. Ya comentaremos cada una de estas partes de forma mas profunda a medida que vamos avanzando.

En la primera parte del programa como ya hemos dicho lo que se realiza es la generación del perfil de la botella. La generación del perfil se lleva a cabo haciendo uso de la subrutina de la Spline Cúbica Natural la cual nos genera la curva, introduciendo los datos de la botella. Partiendo de esta subrutina hemos realizado una serie de modificaciones de manera que usando como base la subrutina de la spline podamos obtener los volúmenes de la botella, que es la segunda parte.

A continuación se presenta el programa que se utiliza para resolver nuestro problema:

```
% ALGORITMO DE LAS BOTELLAS DE VIDRIO
 % Para construir la spline cubica natural S que interpola a la funcion f,
 % definida en los puntos x(0) < x(1) < ... < x(n), verificando
 % S"(x(0)) = S"(x(n)) = 0:
 %
 % ENTRADA:   n; x(0), x(1), ..., x(n); puede generar A(I) = f(x(I))
 %          para I = 0, 1, ..., n o entrar A(I) para I = 0, 1, ..., n.
 %
 % SALIDA:  A(J), B(J), C(J), D(J) para J = 0, 1, ..., n - 1.
 %
 % NOTE:    S(x) = A(J) + B(J)*( x - x(J) ) + C(J)*( x - x(J) )**2 +
 %          D(J) * ( x - x(J) )**3 for x(J) <= x < x(J + 1)
 syms('OK','FLAG','N','I','X','A','AA','NAME','INP','F','M','H','XA','espesor')
 syms('XL','XU','XZ','C','J','B','D','OUP','x','s','v','y');
 TRUE=1;
 FALSE=0;
 fprintf(1,'Este es el metodo de obtencion del volumen de botellas de vidrio.\n');
 OK = FALSE;
```

```
while OK == FALSE
fprintf(1,'Elija la forma de entrada de datos:\n');
fprintf(1,'1. Entrada termino a termino desde el teclado\n');
fprintf(1,'2. Entrada de datos desde un fichero de texto\n');
fprintf(1,'3. Generar datos usando una funcion F con los nodos introducidos ');
fprintf(1,'desde el teclado\n');
fprintf(1,'4. Generar datos usando una funcion F con los nodos de un ');
fprintf(1,'fichero de texto\n');
fprintf(1,'Elija 1, 2, 3, o 4 \n');
FLAG = input(' ');
  if FLAG >= 1 & FLAG <= 4
OK = TRUE;
  end
end
if FLAG == 1
OK = FALSE;
  while OK == FALSE
fprintf(1,'Escriba n\n');
N = input(' ');
     if N > 0
OK = TRUE;
X = zeros(1,N+1);
A = zeros(1,N+1);
        for I = 0:N
fprintf(1,'Escriba X(%d) y F(X(%d)) ', I, I);
```

```
fprintf(1,'en lineas separadas.\n');
X(I+1) = input(' ');
A(I+1) = input(' ');
            end
        else fprintf(1,'El numero debe ser entero positivo\n');
         end
   end
end
if FLAG == 2
fprintf(1,'Ha sido creado un fichero con los datos en dos ');
fprintf(1,'columnas ?\n');
fprintf(1,'Escriba Y o N\n');
AA = input(' ','s');
   if AA == 'Y' | AA == 'y'
fprintf(1,'Escriba el nombre del fichero de la forma - ');
fprintf(1,'disco:\\nombre.ext\n');
fprintf(1,'Por ejemplo: A:\\DATA.DTA\n');
NAME = input(' ','s');
INP = fopen(NAME,'rt');
OK = FALSE;
        while OK == FALSE
fprintf(1,'Escriba n\n');
N = input(' ');
             if N > 0
X = zeros(1,N+1);
```

```
A = zeros(1,N+1);
        for I = 0:N
X(I+1) = fscanf(INP, '%f',1);
A(I+1) = fscanf(INP, '%f',1);
        end
fclose(INP);
OK = TRUE;
      else
fprintf(1,'El numero debe ser entero positivo\n');
      end
    end
  else
fprintf(1,'Por favor creese el fichero de entrada en dos columnas ');
fprintf(1,'con los valores de X y F(X) en las columnas correspondientes.\n');
fprintf(1,'El programa finalizara para que el fichero pueda ser creado.\n');
OK = FALSE;
  end
end
if FLAG == 3
fprintf(1,'Escriba la funcion F(x) en terminos de x.\n');
fprintf(1,'For example: cos(x) \n');
s = input(' ','s');
F = inline(s,'x');
OK = FALSE;
  while OK == FALSE
```

```
fprintf(1,'Escriba n\n');
N = input(' ');
       if N > 0
X = zeros(1,N+1);
A = zeros(1,N+1);
        for I = 0:N
fprintf(1,'Escriba X(%d)\n', I);
X(I+1) = input(' ');
A(I+1) = F(X(I+1));
        end
OK = TRUE;
       else
fprintf(1,'El numero debe ser entero positivo\n');
       end
   end
end
if FLAG == 4
fprintf(1,'Ha sido creado el fichero de texto con los valores de X?\n');
fprintf(1,'Escriba Y o N\n');
AA = input(' ','s');
   if AA == 'Y' | AA == 'y'
fprintf(1,'Escriba el nombre del fichero de la forma - ');
fprintf(1,'disco:\\nombre.ext\n');
fprintf(1,'Por ejemplo:   A:\\DATA.DTA\n');
NAME = input(' ','s');
```

```
INP = fopen(NAME,'rt');
fprintf(1,'Escriba la funcion F(x) en terminos de x.\n');
fprintf(1,'Por ejemplo: cos(x) \n');
s = input(' ','s');
F = inline(s,'x');
OK = FALSE;
    while OK == FALSE
fprintf(1,'Escriba n\n');
N = input(' ');
        if N > 0
OK = TRUE;
X = zeros(1,N+1);
A = zeros(1,N+1);
            for I = 0:N
X(I+1) = fscanf(INP, '%f',1);
A(I+1) = F(X(I+1));
            end
fclose(INP);
        else fprintf(1,'El numero debe ser entero positivo\n');
        end
    end
  else
fprintf(1,'El programa finalizara para que el fichero de entrada pueda ser creado\n');
OK = FALSE;
 end
```

```
 end
 if OK == TRUE
 M = N - 1;
% STEP 1
 H = zeros(1,M+1);
   for I = 0:M
 H(I+1) = X(I+2) - X(I+1);
   end
% STEP 2
% Use XA in place of ALPHA
 XA = zeros(1,M+1);
   for I = 1:M
 XA(I+1) = 3.0*(A(I+2)*H(I)-A(I+1)*(X(I+2)-X(I))+A(I)*H(I+1))/(H(I+1)*H(I));
   end
% STEP 3
% STEPs 3, 4, 5 and part of 6 solve the tridiagonal system using
% Crout reduction.
% use XL, XU, XZ in place of L, MU, Z resp.
 XL = zeros(1,N+1);
 XU = zeros(1,N+1);
 XZ = zeros(1,N+1);
 XL(1) = 1;
 XU(1) = 0;
 XZ(1) = 0;
% STEP 4
```

```
  for I = 1:M
XL(I+1) = 2*(X(I+2)-X(I))-H(I)*XU(I);
XU(I+1) = H(I+1)/XL(I+1);
XZ(I+1) = (XA(I+1)-H(I)*XZ(I))/XL(I+1);
  end
% STEP 5
XL(N+1) = 1;
XZ(N+1) = 0;
B = zeros(1,N+1);
C = zeros(1,N+1);
D = zeros(1,N+1);
C(N+1) = XZ(N+1);
% STEP 6
  for I = 0:M
J = M-I;
C(J+1) = XZ(J+1)-XU(J+1)*C(J+2);
B(J+1) = (A(J+2)-A(J+1))/H(J+1) - H(J+1) * (C(J+2) + 2.0 * C(J+1)) / 3.0;
D(J+1) = (C(J+2) - C(J+1)) / (3.0 * H(J+1));
  end
% STEP 7
fprintf(1,'Elija la forma de salida de datos\n');
fprintf(1,'1. Pantalla\n');
fprintf(1,'2. Fichero de texto\n');
fprintf(1,'Escriba 1 o 2\n');
FLAG = input(' ');
```

```
  if FLAG == 2
fprintf(1,'Escriba el nombre del fichero de la forma - disco:\\nombre.ext\n');
fprintf(1,'Por ejemplo:   A:\\OUTPUT.DTA\n');
NAME = input(' ','s');
OUP = fopen(NAME,'wt');
  else
OUP = 1;
  end
fprintf(OUP, 'INTERPOLACION SPLINE CUBICA NATURAL n\n');
fprintf(OUP, 'Los puntos X(0), ..., X(N) son:\n');
  for I = 0:N
fprintf(OUP, ' %11.8f', X(I+1));
  end
fprintf(OUP, '\n\nLos coeficientes de la spline en los subintervalos ');
fprintf(OUP, 'son:\n');
fprintf(OUP, 'Para I = 0, ..., N-1\n');
fprintf(OUP, '    A(I)         B(I)          C(I)        D(I)\n');
  for I = 0:M
fprintf(OUP,'%13.8f %13.8f %13.8f %13.8f \n',A(I+1),B(I+1),C(I+1),D(I+1));
  end
  if OUP ~= 1
fclose(OUP);
fprintf(1,'Fichero de salida creado satisfactoriamente \n',NAME);
  end
y = zeros(1,101*(M+1));
```

```
 v = zeros(1,101*(M+1));
   for J = 1:M+1
       for I = 1:101
 v(101*(J-1)+I)=X(J) + (I-1)*(X(J+1)-X(J))/100;
 y(101*(J-1)+I)=A(J)+B(J)*(v(101*(J-1)+I)-X(J))+C(J)*(v(101*(J-1)+I)-
X(J))^2+D(J)*(v(101*(J-1)+I)-X(J))^3;
       end
   end
end
 JX= zeros(N);
 XI= zeros(5);
 WI= zeros(5);
 XI(1)= 0.9061798459;
 XI(2)= 0.5384693101;
 XI(3)= 0.0;
 XI(4)= -XI(2);
 XI(5)= -XI(1);
 WI(1)= 0.2369268850;
 WI(2)= 0.4786286705;
 WI(3)= 0.5688888889;
 WI(4)= WI(2);
 WI(5)= WI(1);
 for J=1:N
     JX(J)= 0;
   for I=1:5
       K1=(X(J+1)-X(J))/2;
```

```
        K2=(X(J+1)+X(J))/2;

        XX=K1*XI(I)+K2;

        Q=pi*[A(J)+B(J)*(XX-X(J))+C(J)*(XX-X(J))^2+D(J)*(XX-X(J))^3]^2;

        JX(J)=JX(J)+WI(I)*Q;

    end

    JX(J)=JX(J)*K1;

end

INT1=0;

for J=1:N

  INT1=INT1+JX(J);

end

 espesor=0;

fprintf(1,'Escriba espesor en las mismas unidades que introdujo los datos\n');

 espesor= input(' ');

for J=1:N

     JX(J)= 0;

    for I=1:5

        K1=(X(J+1)-X(J))/2;

        K2=(X(J+1)+X(J))/2;

        XX=K1*XI(I)+K2;

        P=pi*[A(J)+B(J)*(XX-X(J))+C(J)*(XX-X(J))^2+D(J)*(XX-X(J))^3-espesor]^2;

        JX(J)=JX(J)+WI(I)*P;

    end

    JX(J)=JX(J)*K1;

end
```

```
INT2=0;
for J=1:N
  INT2=INT2+JX(J);
end
INT3=0;
INT3=INT1-INT2;
INT4=0;
INT4=INT1-INT3;
fprintf(1,'\nEl volumen del contenido es la integral de F desde %13.8f hasta %13.8f es\n',0,X(J+1));
fprintf(1,'%13.8f\n',INT4);
fprintf(1,'\nEl volumen del continente es la integral de F desde %13.8f hasta %13.8f es\n',0,X(J+1));
fprintf(1,'%13.8f\n',INT3);
figure(1);
 plot(v(:),y(:),'-r',X(:),A(:),'ok');
 axis([0 X(N+1) 0 X(N+1)]);
 title('Spline Cubica Natural');
```

El **funcionamiento** del programa consiste en:

1º- Se procede a introducir los datos de la botella en el programa.

2º- Se procede al desarrollo de la spline, obteniendo como resultados los coeficientes de cada uno de los intervalos.

3º- El programa nos pide el espesor de la botella.

4º- Una vez introducido el espesor, se ejecuta de manera repetida dos bucles que nos determinan el volumen tanto del contenido como del continente, el volumen del continente se obtiene como diferencia entre la integral del contorno exterior y la integral del contorno interior. El volumen del contenido se obtiene como la diferencia entre el contorno interior y la diferencia entre contorno interior y exterior.

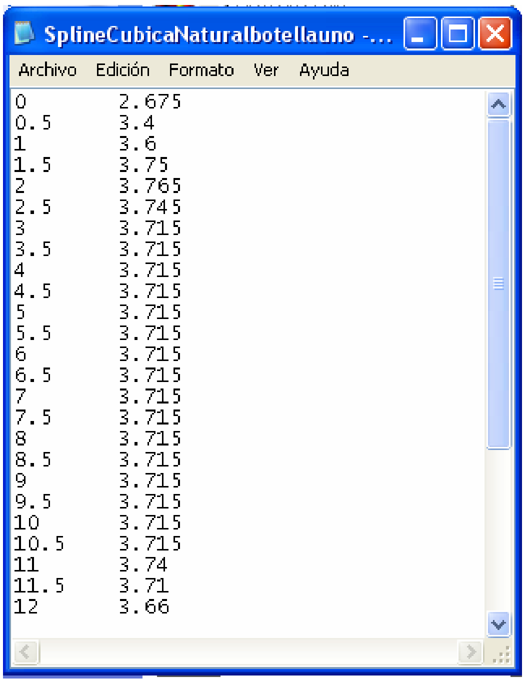
5º- Se obtienen de forma directa los resultados del volumen del continente y del contenido, al mismo que tiempo que la gráfica que representa el perfil de la botella.

Pero más que explicar el desarrollo del programa teóricamente veamos como se ejecuta con los ejemplos de nuestras tres botellas.

# 7. Ejecuciones prácticas del programa:

## 7.1. Primera botella:

- En primer lugar se cargar el programa, y se abre el fichero de la subrutina que hemos creado.
- En segundo lugar se introducen los datos de la botella los cuales hemos guardado en un fichero de texto.

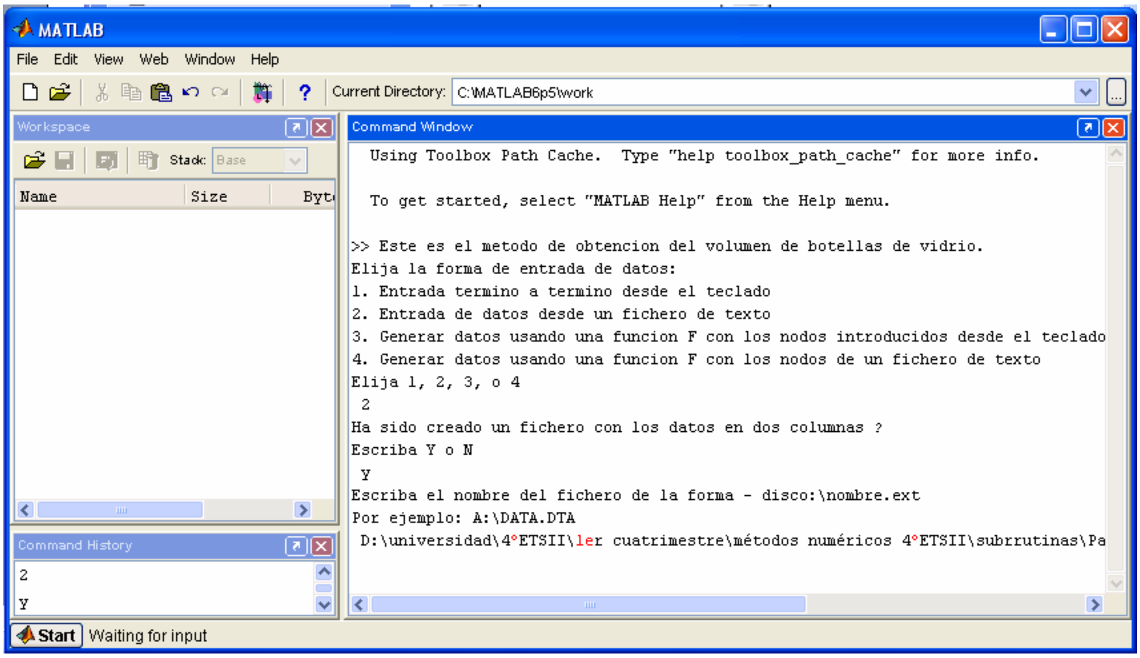


SplineCubicaNaturalbotellauno -...

Archivo Edición Formato Ver Ayuda

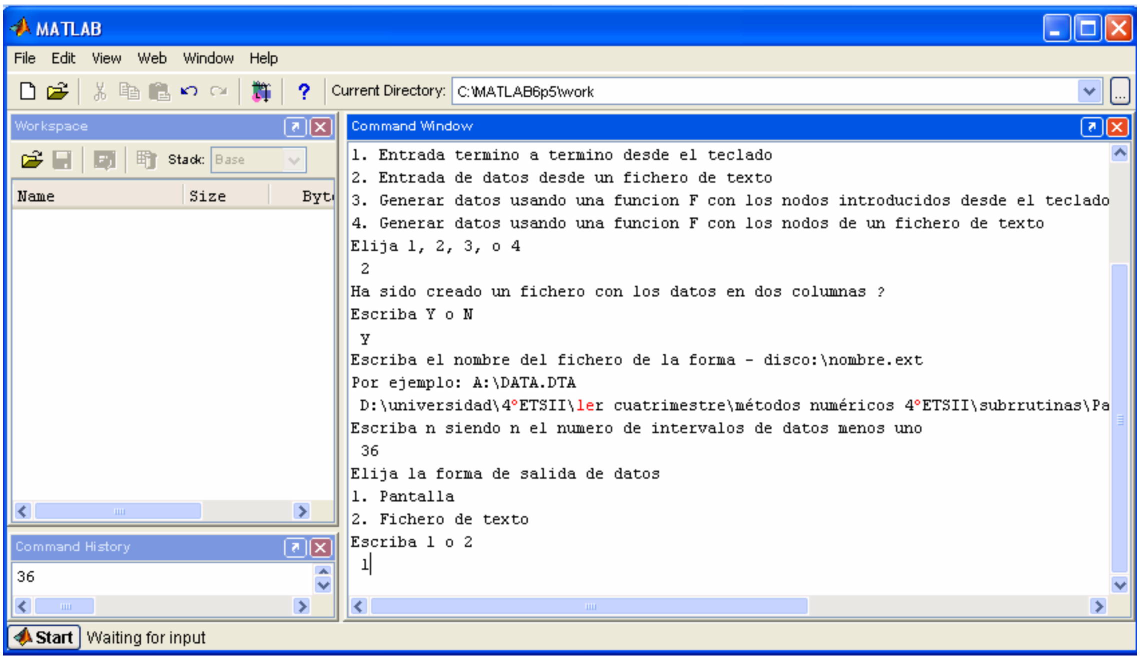
| | |
|---|---|
| 0 | 2.675 |
| 0.5 | 3.4 |
| 1 | 3.6 |
| 1.5 | 3.75 |
| 2 | 3.765 |
| 2.5 | 3.745 |
| 3 | 3.715 |
| 3.5 | 3.715 |
| 4 | 3.715 |
| 4.5 | 3.715 |
| 5 | 3.715 |
| 5.5 | 3.715 |
| 6 | 3.715 |
| 6.5 | 3.715 |
| 7 | 3.715 |
| 7.5 | 3.715 |
| 8 | 3.715 |
| 8.5 | 3.715 |
| 9 | 3.715 |
| 9.5 | 3.715 |
| 10 | 3.715 |
| 10.5 | 3.715 |
| 11 | 3.74 |
| 11.5 | 3.71 |
| 12 | 3.66 |

- Una vez hemos ejecutado la subrutina lo primero que esta nos pide es la forma en la cual vamos a introducir los datos de la botella en nuestro caso los introducimos en forma de fichero el cual como ya hemos dicho ya esta creado. Introducimos donde se encuentra el fichero. Como se muestra a continuación:




- En siguiente paso es introducir el número de intervalos de datos de la botella menos uno, en el caso de esta primera botella es 36.
- A continuación el programa nos pregunta en que formato que queremos obtener los datos si directamente en pantalla o en un fichero. Si elegimos obtener los datos en un fichero, los valores tanto de los coeficientes de los intervalos de la spline como la representación gráfica del perfil de la botella se obtendrán en un fichero que creamos nosotros, esta creación de fichero se genera de la misma forma que con todas las subrutinas que se ejecutaron durante el curso.

En este caso nosotros vamos a pedir que los resultados salgan por pantalla para poder verlos directamente en el programa.




- Obtenemos los valores de los coeficientes de cada uno de los intervalos, los cuales se presentan a continuación:

INTERPOLACION SPLINE CUBICA NATURAL n

Los puntos X(0), ..., X(N) son:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00000000 | 0.50000000 | 1.00000000 | 1.50000000 | 2.00000000 | 2.50000000 |
| 3.00000000 | 3.50000000 | 4.00000000 | 4.50000000 | 5.00000000 | 5.50000000 |
| 6.00000000 | 6.50000000 | 7.00000000 | 7.50000000 | 8.00000000 | 8.50000000 |
| 9.00000000 | 9.50000000 | 10.00000000 | 10.50000000 | 11.00000000 | 11.50000000 |
| 12.00000000 | 12.50000000 | 13.00000000 | 13.50000000 | 14.00000000 | 14.50000000 |
| 15.00000000 | 15.50000000 | 16.00000000 | 16.50000000 | 17.00000000 | 17.50000000 |
| 18.00000000 | | | | | |

Los coeficientes de la spline en los subintervalos son:

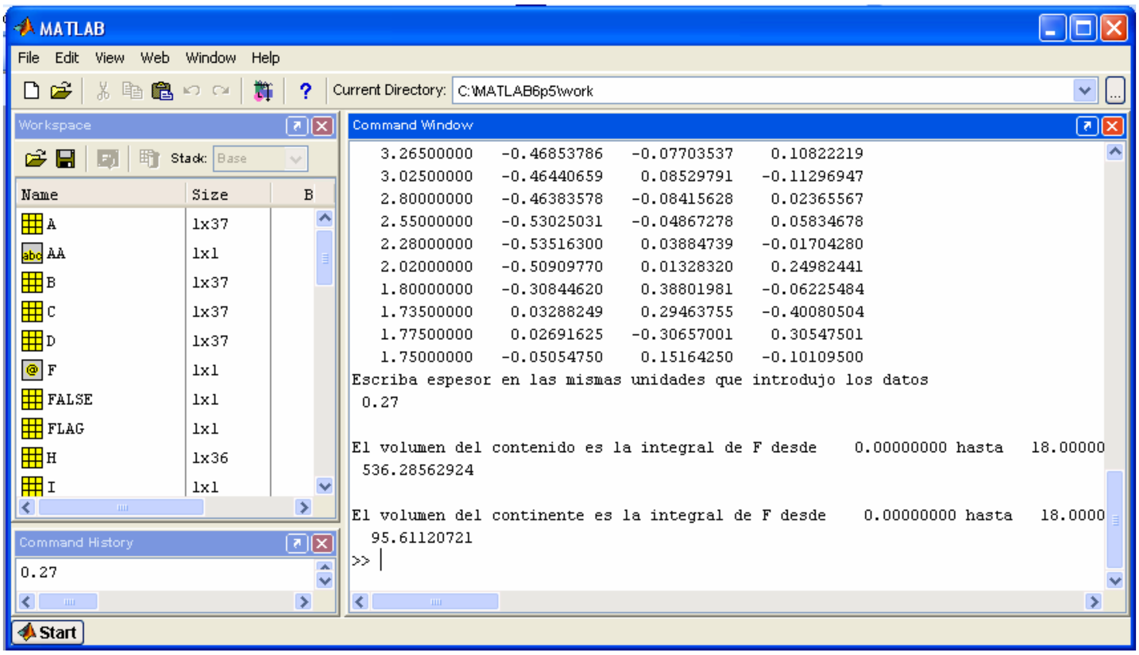
Para I = 0, ..., N-1

| A(I) | B(I) | C(I) | D(I) |
|---|---|---|---|
| 2.67500000 | 1.72905020 | 0.00000000 | -1.11620080 |
| 3.40000000 | 0.89189960 | -1.67430120 | 1.38100400 |
| 3.60000000 | 0.25335140 | 0.39720481 | -0.60781522 |
| 3.75000000 | 0.19469479 | -0.51451802 | 0.37025687 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.76500000 | -0.04213058 | 0.04086728 | -0.07321225 |
| 3.74500000 | -0.05617249 | -0.06895109 | 0.12259213 |
| 3.71500000 | -0.03317948 | 0.11493710 | -0.09715627 |
| 3.71500000 | 0.00889042 | -0.03079730 | 0.02603294 |
| 3.71500000 | -0.00238218 | 0.00825211 | -0.00697549 |
| 3.71500000 | 0.00063831 | -0.00221113 | 0.00186902 |
| 3.71500000 | -0.00017105 | 0.00059240 | -0.00050059 |
| 3.71500000 | 0.00004591 | -0.00015849 | 0.00013335 |
| 3.71500000 | -0.00001257 | 0.00004154 | -0.00003281 |
| 3.71500000 | 0.00000437 | -0.00000767 | -0.00000213 |
| 3.71500000 | -0.00000490 | -0.00001086 | 0.00004132 |
| 3.71500000 | 0.00001523 | 0.00005112 | -0.00016315 |
| 3.71500000 | -0.00005602 | -0.00019360 | 0.00061127 |
| 3.71500000 | 0.00020883 | 0.00072330 | -0.00228193 |
| 3.71500000 | -0.00077931 | -0.00269959 | 0.00851644 |
| 3.71500000 | 0.00290842 | 0.01007507 | -0.03178383 |
| 3.71500000 | -0.01085438 | -0.03760068 | 0.11861890 |
| 3.71500000 | 0.04050911 | 0.14032766 | -0.24269176 |
| 3.74000000 | -0.00118205 | -0.22370997 | 0.21214814 |
| 3.71000000 | -0.06578092 | 0.09451223 | -0.32590079 |
| 3.66000000 | -0.21569428 | -0.39433895 | 0.25145502 |
| 3.48500000 | -0.42144196 | -0.01715642 | -0.03991930 |
| 3.26500000 | -0.46853786 | -0.07703537 | 0.10822219 |
| 3.02500000 | -0.46440659 | 0.08529791 | -0.11296947 |
| 2.80000000 | -0.46383578 | -0.08415628 | 0.02365567 |

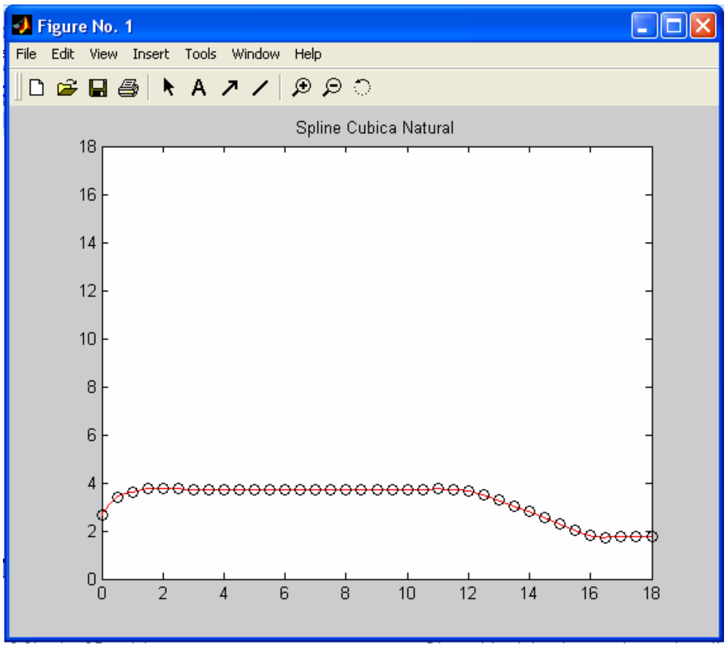
| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.55000000 | -0.53025031 | -0.04867278 | 0.05834678 |
| 2.28000000 | -0.53516300 | 0.03884739 | -0.01704280 |
| 2.02000000 | -0.50909770 | 0.01328320 | 0.24982441 |
| 1.80000000 | -0.30844620 | 0.38801981 | -0.06225484 |
| 1.73500000 | 0.03288249 | 0.29463755 | -0.40080504 |
| 1.77500000 | 0.02691625 | -0.30657001 | 0.30547501 |
| 1.75000000 | -0.05054750 | 0.15164250 | -0.10109500 |

- A continuación el programa nos pide el espesor de la botella, que el caso nuestro es 0.27cm, debemos introducirlo en las mismas unidades que introdujimos los datos de la botella.
- Una vez introducimos el espesor de la botella el programa nos da ya directamente el volumen del continente y del contenido de nuestra botella, en las unidades tomadas, al mismo tiempo se nos genera la grafica del perfil de la botella.




El volumen del contenido es 536.28 $cm^3$.

El volumen del continente es 95.61 $cm^3$.

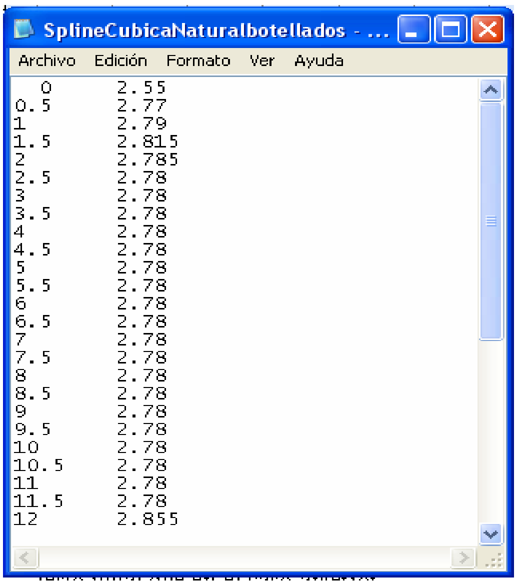



Del mismo modo procedemos con las otras dos botellas que hemos usado como ejemplos de aplicación de este programa.

## 7.2. Segunda botella:

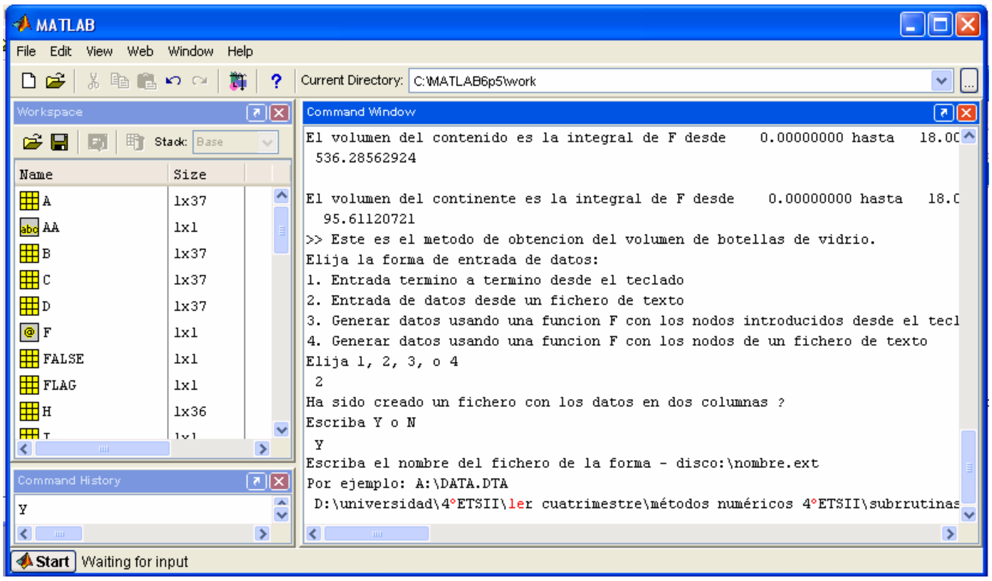
Ejecutamos los pasos en el mismo orden:

- Primero cargamos el programa en el MATLAB, para a continuación cargar la subrutina.
- Los datos de la botella los hemos introducido también en un fichero de testo igual que en el caso anterior.

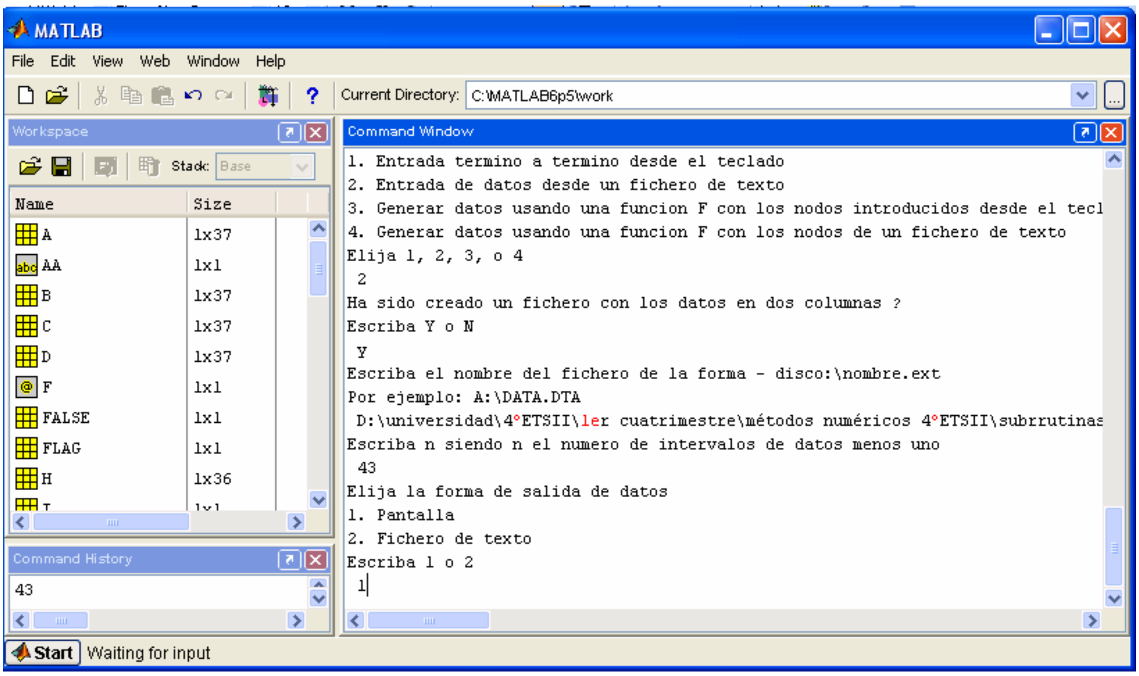



| | |
|---|---|
| 0 | 2.55 |
| 0.5 | 2.77 |
| 1 | 2.79 |
| 1.5 | 2.815 |
| 2 | 2.785 |
| 2.5 | 2.78 |
| 3 | 2.78 |
| 3.5 | 2.78 |
| 4 | 2.78 |
| 4.5 | 2.78 |
| 5 | 2.78 |
| 5.5 | 2.78 |
| 6 | 2.78 |
| 6.5 | 2.78 |
| 7 | 2.78 |
| 7.5 | 2.78 |
| 8 | 2.78 |
| 8.5 | 2.78 |
| 9 | 2.78 |
| 9.5 | 2.78 |
| 10 | 2.78 |
| 10.5 | 2.78 |
| 11 | 2.78 |
| 11.5 | 2.78 |
| 12 | 2.855 |

- Señalamos la forma en que los datos de la botella van a ser introducidos en el programa, y donde se encuentran esos datos.




- Introducimos el número de intervalos de datos que hemos introducido que para la botella dos es 43
- Y pedimos que los resultados de los coeficientes de los intervalos de la spline nos salgan por pantalla.



- A continuación al igual que para el caso anterior obtenemos todos los valores de los coeficientes, los cuales se muestran a continuación:

INTERPOLACION SPLINE CUBICA NATURAL n

Los puntos X(0), ..., X(N) son:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00000000 | 0.50000000 | 1.00000000 | 1.50000000 | 2.00000000 | 2.50000000 |
| 3.00000000 | 3.50000000 | 4.00000000 | 4.50000000 | 5.00000000 | 5.50000000 |
| 6.00000000 | 6.50000000 | 7.00000000 | 7.50000000 | 8.00000000 | 8.50000000 |
| 9.00000000 | 9.50000000 | 10.00000000 | 10.50000000 | 11.00000000 | 11.50000000 |
| 12.00000000 | 12.50000000 | 13.00000000 | 13.50000000 | 14.00000000 | 14.50000000 |
| 15.00000000 | 15.50000000 | 16.00000000 | 16.50000000 | 17.00000000 | 17.50000000 |
| 18.00000000 | 18.50000000 | 19.00000000 | 19.50000000 | 20.00000000 | 20.50000000 |
| 21.00000000 | 21.50000000 | | | | |

Los coeficientes de la spline en los subintervalos son:

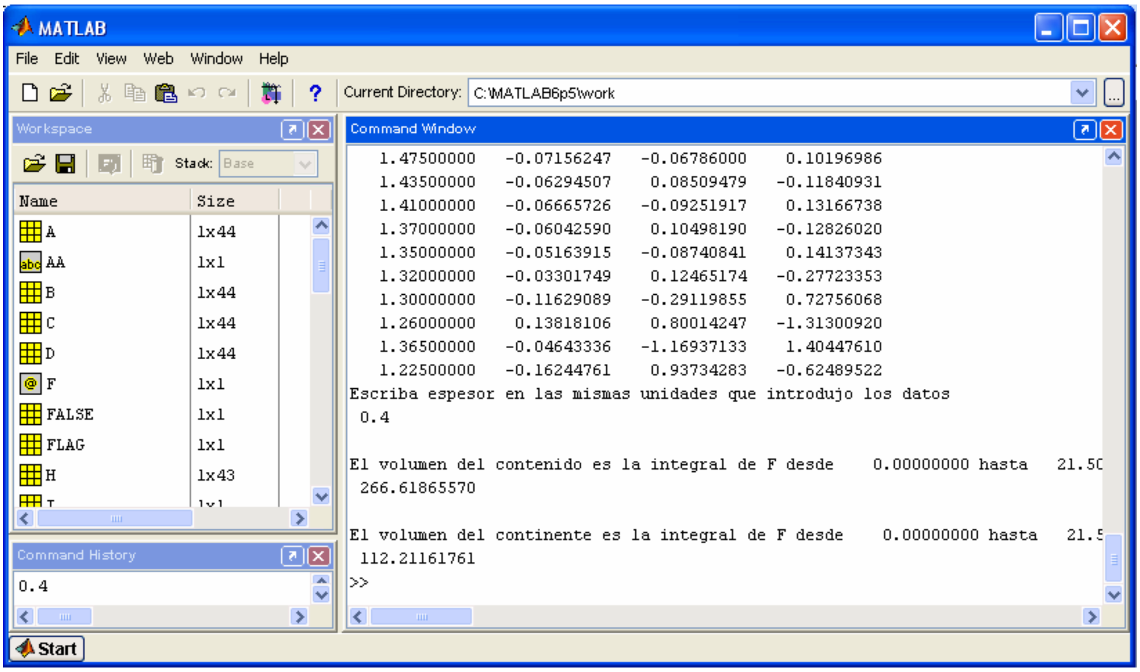
Para I = 0, ..., N-1

| A(I) | B(I) | C(I) | D(I) |
|---|---|---|---|
| 2.55000000 | 0.55025774 | 0.00000000 | -0.44103096 |
| 2.77000000 | 0.21948452 | -0.66154643 | 0.60515478 |
| 2.79000000 | 0.01180417 | 0.24618573 | -0.33958815 |
| 2.81500000 | 0.00329879 | -0.26319649 | 0.27319782 |
| 2.78500000 | -0.05499934 | 0.14660024 | -0.11320314 |
| 2.78000000 | 0.00669855 | -0.02320446 | 0.01961472 |
| 2.78000000 | -0.00179487 | 0.00621762 | -0.00525575 |
| 2.78000000 | 0.00048093 | -0.00166601 | 0.00140827 |
| 2.78000000 | -0.00012887 | 0.00044640 | -0.00037734 |
| 2.78000000 | 0.00003453 | -0.00011961 | 0.00010110 |
| 2.78000000 | -0.00000926 | 0.00003204 | -0.00002706 |
| 2.78000000 | 0.00000249 | -0.00000855 | 0.00000712 |
| 2.78000000 | -0.00000071 | 0.00000214 | -0.00000144 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.78000000 | 0.00000035 | -0.00000002 | -0.00000136 |
| 2.78000000 | -0.00000069 | -0.00000206 | 0.00000687 |
| 2.78000000 | 0.00000241 | 0.00000825 | -0.00002612 |
| 2.78000000 | -0.00000894 | -0.00003093 | 0.00009761 |
| 2.78000000 | 0.00003334 | 0.00011548 | -0.00036431 |
| 2.78000000 | -0.00012442 | -0.00043099 | 0.00135965 |
| 2.78000000 | 0.00046433 | 0.00160848 | -0.00507427 |
| 2.78000000 | -0.00173289 | -0.00600292 | 0.01893742 |
| 2.78000000 | 0.00646725 | 0.02240321 | -0.07067543 |
| 2.78000000 | -0.02413611 | -0.08360993 | 0.26376430 |
| 2.78000000 | 0.09007719 | 0.31203652 | -0.38438179 |
| 2.85500000 | 0.11382737 | -0.26453616 | -0.16623716 |
| 2.82500000 | -0.27538666 | -0.51389190 | 0.48933044 |
| 2.62000000 | -0.42228073 | 0.22010375 | -1.19108458 |
| 2.31500000 | -1.09549041 | -1.56652312 | 2.47500788 |
| 1.68500000 | -0.80575762 | 2.14598871 | -1.74894694 |
| 1.60000000 | 0.02852088 | -0.47743171 | 0.44077990 |
| 1.55000000 | -0.11832591 | 0.18373814 | -0.13417265 |
| 1.52000000 | -0.03521726 | -0.01752084 | 0.01591070 |
| 1.50000000 | -0.04080507 | 0.00634521 | -0.04947014 |
| 1.47500000 | -0.07156247 | -0.06786000 | 0.10196986 |
| 1.43500000 | -0.06294507 | 0.08509479 | -0.11840931 |
| 1.41000000 | -0.06665726 | -0.09251917 | 0.13166738 |
| 1.37000000 | -0.06042590 | 0.10498190 | -0.12826020 |
| 1.35000000 | -0.05163915 | -0.08740841 | 0.14137343 |

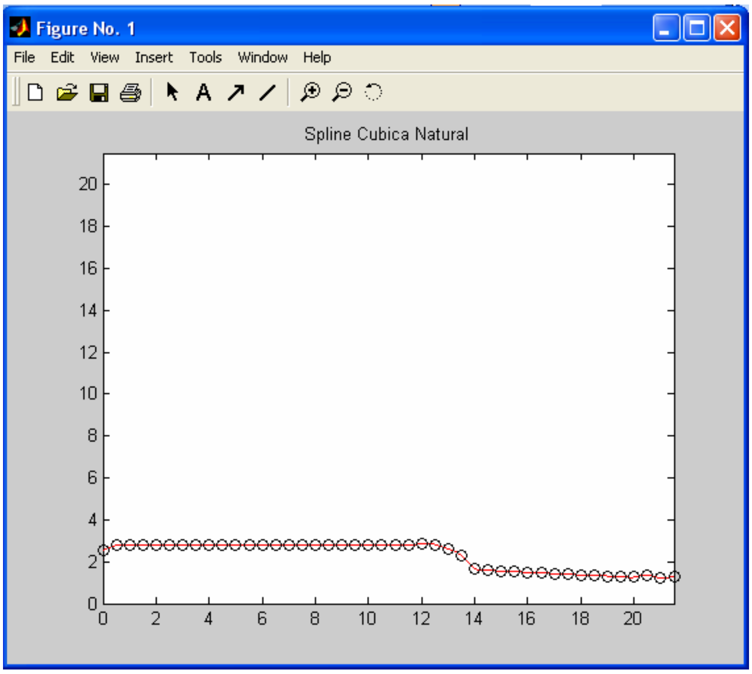
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.32000000 | -0.03301749 | 0.12465174 | -0.27723353 |
| 1.30000000 | -0.11629089 | -0.29119855 | 0.72756068 |
| 1.26000000 | 0.13818106 | 0.80014247 | -1.31300920 |
| 1.36500000 | -0.04643336 | -1.16937133 | 1.40447610 |
| 1.22500000 | -0.16244761 | 0.93734283 | -0.62489522 |

- El siguiente dato que se nos pedía es el valor del espesor de la botella, que recordemos deben ser las mismas unidades que las de los datos de la botella que el caso de la botella dos es 0.4cm.
- Una vez introducido el espesor el programa nos da de forma directa el valor de los volúmenes tanto del continente como del contenido en las unidades tomadas, los cuales se presentan a continuación junto con la grafica del perfil de la segunda botella.




El volumen del contenido es 266.618 $cm^3$.

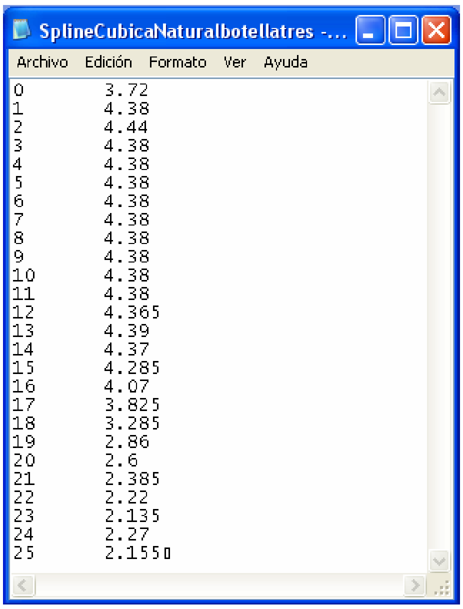
El volumen del continente es 112.21 $cm^3$.




## 7.3. Tercera botella:

Ejecutamos los pasos en el mismo orden:

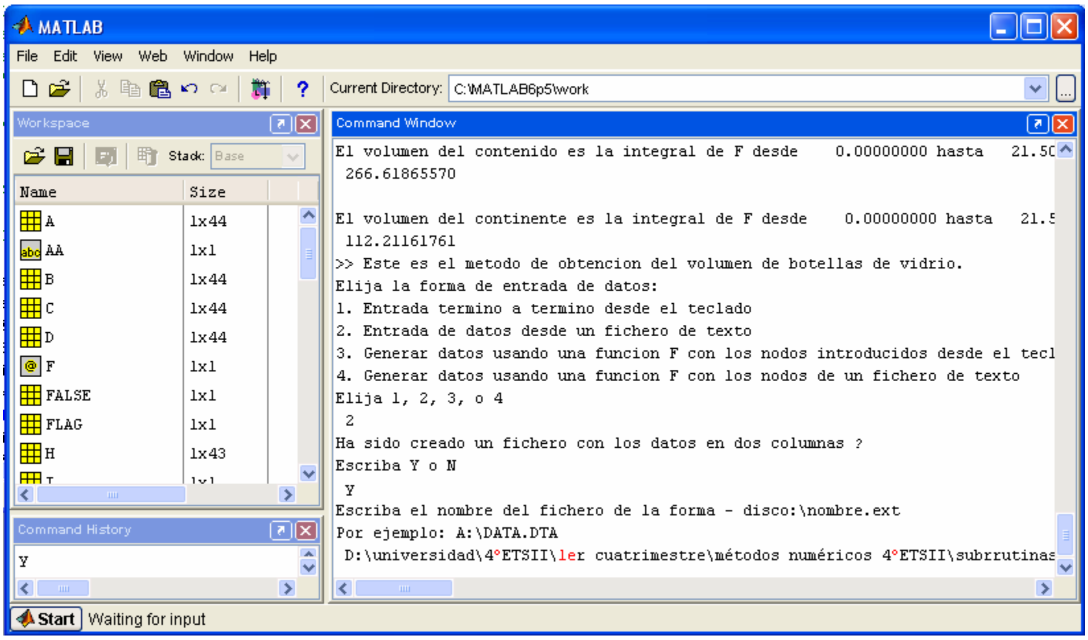
- Primero cargamos el programa en el MATLAB, para a continuación cargar la subrutina.
- Los datos de la botella los hemos introducido también en un fichero de testo igual que en el caso anterior.


SplineCubicaNaturalbotellatres -...

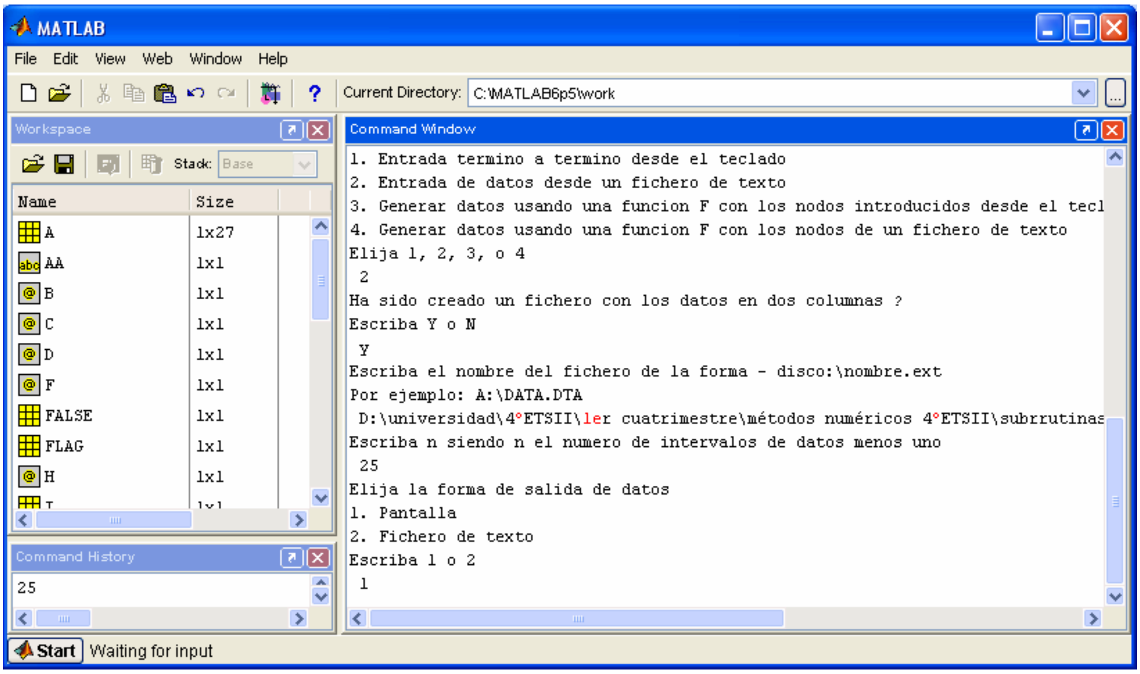
Archivo Edición Formato Ver Ayuda

| | |
|---|---|
| 0 | 3.72 |
| 1 | 4.38 |
| 2 | 4.44 |
| 3 | 4.38 |
| 4 | 4.38 |
| 5 | 4.38 |
| 6 | 4.38 |
| 7 | 4.38 |
| 8 | 4.38 |
| 9 | 4.38 |
| 10 | 4.38 |
| 11 | 4.38 |
| 12 | 4.365 |
| 13 | 4.39 |
| 14 | 4.37 |
| 15 | 4.285 |
| 16 | 4.07 |
| 17 | 3.825 |
| 18 | 3.285 |
| 19 | 2.86 |
| 20 | 2.6 |
| 21 | 2.385 |
| 22 | 2.22 |
| 23 | 2.135 |
| 24 | 2.27 |
| 25 | 2.155 |

- Señalamos la forma en que los datos de la botella van a ser introducidos en el programa, y donde se encuentran esos datos.




- Introducimos el número de intervalos de datos que hemos introducido que para la botella tres es 25.
- Y pedimos que los resultados de los coeficientes de los intervalos de la spline nos salgan por pantalla.



- Obtenemos los valores de los coeficientes de cada uno de los intervalos, los cuales se presentan a continuación:

INTERPOLACION SPLINE CUBICA NATURAL n

Los puntos X(0), ..., X(N) son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.00000000 | 1.00000000 | 2.00000000 | 3.00000000 | 4.00000000 |
| 5.00000000 | 6.00000000 | 7.00000000 | 8.00000000 | 9.00000000 |
| 10.00000000 | 11.00000000 | 12.00000000 | 13.00000000 | 14.00000000 |
| 15.00000000 | 16.00000000 | 17.00000000 | 18.00000000 | 19.00000000 |
| 20.00000000 | 21.00000000 | 22.00000000 | 23.00000000 | 24.00000000 |
| 25.00000000 | | | | |

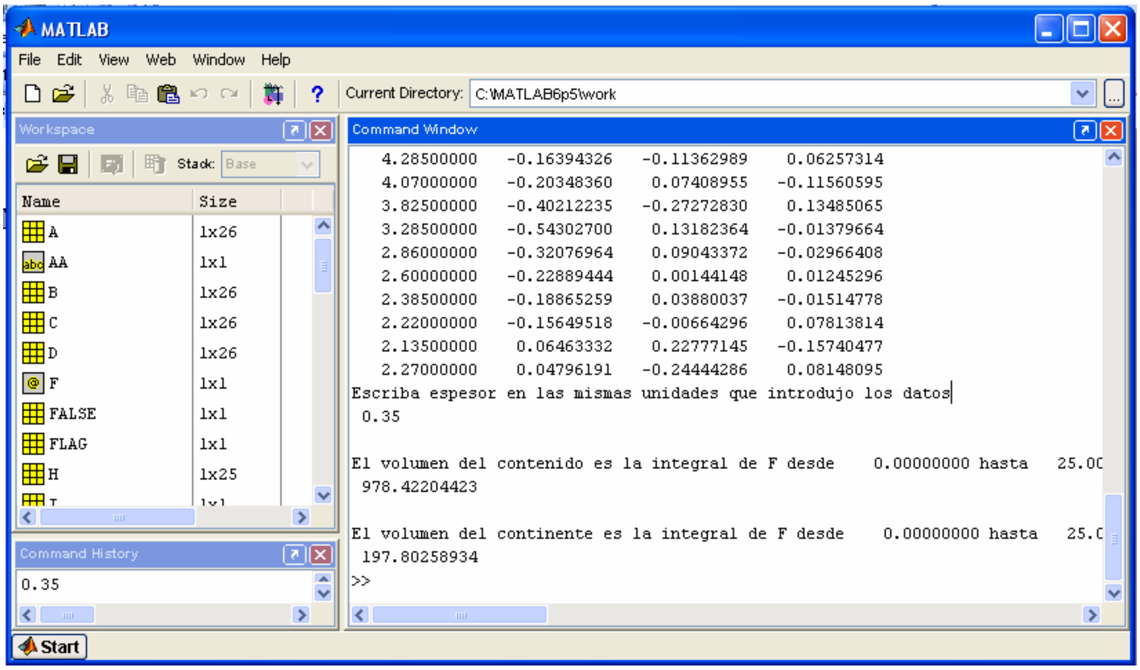
Los coeficientes de la spline en los subintervalos son:

Para I = 0, ..., N-1

| A(I) | B(I) | C(I) | D(I) |
|---|---|---|---|
| 3.72000000 | 0.81099964 | 0.00000000 | -0.15099964 |
| 4.38000000 | 0.35800071 | -0.45299893 | 0.15499822 |
| 4.44000000 | -0.08300249 | 0.01199573 | 0.01100676 |
| 4.38000000 | -0.02599076 | 0.04501600 | -0.01902524 |
| 4.38000000 | 0.00696551 | -0.01205973 | 0.00509422 |
| 4.38000000 | -0.00187129 | 0.00322293 | -0.00135165 |
| 4.38000000 | 0.00051964 | -0.00083200 | 0.00031236 |
| 4.38000000 | -0.00020728 | 0.00010507 | 0.00010221 |
| 4.38000000 | 0.00030949 | 0.00041170 | -0.00072120 |

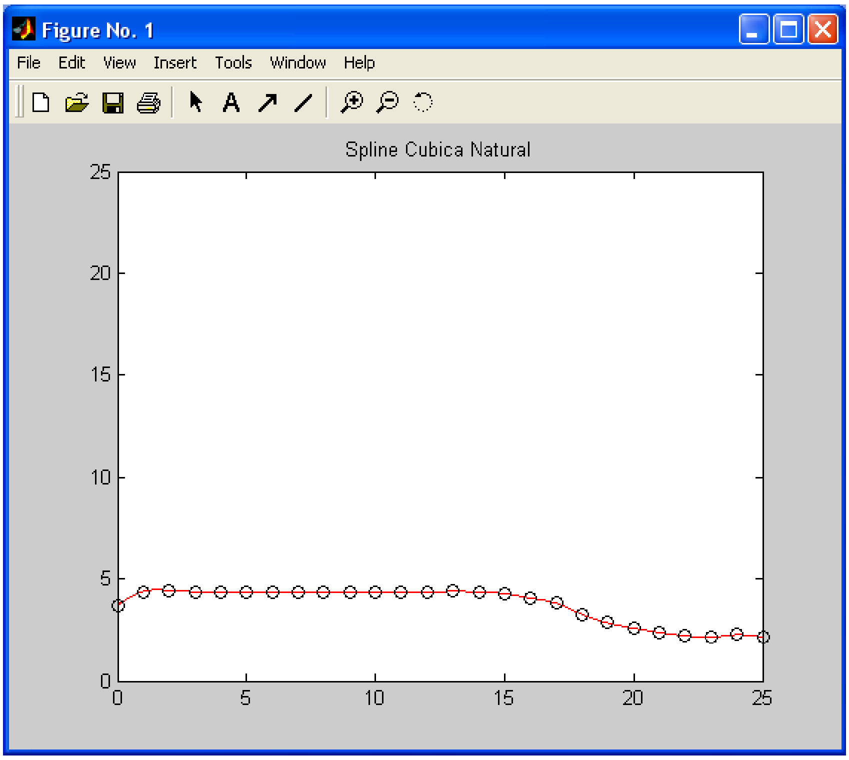
| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.38000000 | -0.00103069 | -0.00175189 | 0.00278259 |
| 4.38000000 | 0.00381328 | 0.00659587 | -0.01040915 |
| 4.38000000 | -0.01422243 | -0.02463157 | 0.02385400 |
| 4.36500000 | 0.00807642 | 0.04693042 | -0.03000684 |
| 4.39000000 | 0.01191674 | -0.04309010 | 0.01117337 |
| 4.37000000 | -0.04074337 | -0.00957000 | -0.03468663 |
| 4.28500000 | -0.16394326 | -0.11362989 | 0.06257314 |
| 4.07000000 | -0.20348360 | 0.07408955 | -0.11560595 |
| 3.82500000 | -0.40212235 | -0.27272830 | 0.13485065 |
| 3.28500000 | -0.54302700 | 0.13182364 | -0.01379664 |
| 2.86000000 | -0.32076964 | 0.09043372 | -0.02966408 |
| 2.60000000 | -0.22889444 | 0.00144148 | 0.01245296 |
| 2.38500000 | -0.18865259 | 0.03880037 | -0.01514778 |
| 2.22000000 | -0.15649518 | -0.00664296 | 0.07813814 |
| 2.13500000 | 0.06463332 | 0.22777145 | -0.15740477 |
| 2.27000000 | 0.04796191 | -0.24444286 | 0.08148095 |

- El siguiente dato que se nos pedía es el valor del espesor de la botella, que debe tener las mismas unidades que los datos de las botellas introducidos, que el caso de la botella tres es 0.35cm.
- Una vez introducido el espesor el programa nos da de forma directa el valor de los volúmenes tanto del continente como del contenido, en las unidades tomadas, los cuales se presentan a continuación junto con la grafica del perfil de la tercera botella.




El volumen del contenido es 978.42 $cm^3$.

El volumen del continente es 197.80 $cm^3$.



## 8. Resumen:

El objetivo del programa es la obtención del perfil y del volumen del continente y del contenido, mediante la introducción de los datos de la botella. Este programa facilita la visualización previa del perfil y medidas de una botella que pueden ser útiles para la determinación de modelos de botellas en diversas fábricas de embotellado que no tienen claro la forma y características del volumen para el envasado de sus productos.

Hemos encontrado en Internet un trabajo muy semejante al nuestro pero referido a botellas de plástico donde se ve como se realiza el mismo proceso pero utilizando otro programa muy distinto, el cual hemos señalado su hipervínculo en la bibliografía.

## 9. Bibliografía:

http://docentes.uacj.mx/gtapia/AN/Unidad6/Contenido4.htm
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/splines/splines.shtml
http://translate.google.com/translate?hl=es&sl=en&u=http://www.mathworks.com/products/splines/&prev=/search%3Fq%3Dspline%26hl%3Des%26lr%3D
http://www.geocities.com/txemijendrix/tutoriales/splinemacro/smspa2.html
http://www.digitalfran.com/tuto-botella/tuto1.htm **semejante**
http://www.uv.es/~diaz/mn/node40.html
http://docentes.uacj.mx/gtapia/AN/Unidad6/Contenido4.htm
http://www.bsnglasspack.com/html_es/le_verre/fabrication_verre_es.htm
http://www.grupoindsaavedra.com/moldesparavidrio.php
http://www.mil-envases.com.ar/pvbot.html
http://translate.google.com/translate?hl=es&sl=en&u=http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/splines/splines.shtml&prev=/search%3Fq%3Dspline%26start%3D10%26hl%3Des%26lr%3D%26sa%3DN

http://images.google.es/imgres?imgurl=http://www.tsplines.com/i/pictures/frogt-splinesBIG.jpg&imgrefurl=http://www.tsplines.com/gallery.html&h=858&w=1139&sz=324&tbnid=X2tFJVrVcVYyzM:&tbnh=112&tbnw=150&hl=es&start=6&prev=/images%3Fq%3Dsplines%2B%26svnum%3D10%26hl%3Des%26lr%3D

Análisis Métodos numéricos Faires Burden 2Edición Grupo ibero América.

Métodos numéricos para ingenieros